Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2014 S-2DM rx ret

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Mandag den 11. august 2014

Rettevejledning

Opgave 1. Vi betragter femtegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^5 + z^4 - z - 1.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^5x}{dt^5} + \frac{d^4x}{dt^4} - \frac{dx}{dt} - x = 0$$

og

$$(**). \qquad \frac{d^5x}{dt^5} + \frac{d^4x}{dt^4} - \frac{dx}{dt} - x = 24e^t$$

(1) Vis, at udsagnet

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = (z^4 - 1)(z + 1)$$

er opfyldt.

Løsning. Ved udgangning af parenteserne ser man, at

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = (z^4 - 1)(z + 1) = z^5 + z^4 - z - 1.$$

(2) Bestem samtlige rødder i polynomiet P.

Løsning. På baggrund af det ovenstående resultat finder vi, at

$$z^5 + z^4 - z - 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = 1 \vee z = -1 \Leftrightarrow z = -1 \vee z = 1 \vee z = i \vee z = -i,$$

og vi bemærker, at roden -1 er en dobbeltrod, mens de øvrige rødder er simple.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi ser straks, at differentialligningen $(*)$ har den fuldstændige løsning

$$x = x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^t + c_4 \cos t + c_5 \sin t,$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbf{R}$.

(4) Godtgør, at differentialligningen $(*)$ ikke er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Da 1 er rod i polynomiet P er differentialligningen $(*)$ ikke globalt asymptotisk stabil.

(5) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Løsning. Vi gætter på en løsning af formen $\hat{x}(t) = Ate^t$, og vi finder, at $A = 3$, så den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$ er

$$x = x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^t + c_4 \cos t + c_5 \sin t + 3te^t,$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbf{R}$.

Opgave 2. Vi betragter 3×3 matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

og vektordifferentialligningerne

$$(\S) \qquad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z}$$

og

$$(\S\S) \qquad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z} + \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem egenværdierne og egenrummene for matricen A.

Løsning. Matricen A har det karakteristiske polynomium

$$P(t) = \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 3-t & 4 \\ 0 & 4 & 9-t \end{pmatrix} = (2-t)\big(t^2 - 12t + 11\big),$$

hvoraf man finder, at egenværdierne for A (rødderne i P) er $2, 1$ og 11. De tilhørende egenrum er

$$V(2) = N(A - 2E) = \text{span}\{(1,0,0)\},$$
$$V(1) = N(A - E) = \text{span}\{(0,2,-1)\}$$

og

$$V(11) = N(A - 11E) = \text{span}\{(0,1,2)\}.$$

(2) Vis, at matricen A er regulær, og bestem den inverse matrix A^{-1}.

Løsning. Da matricen A ikke har egenværdien 0, er den regulær, og vi ser, at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}.$$

(3) Bestem den fuldstændige løsning for vektordifferentialligningen (§).

Løsning. Vi finder, at vektordifferentialligningen (§) har den fuldstændige løsning

$$\mathbf{z}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{11t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

(4) Bestem den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (§§).

Vi ser, at vektordifferentialligningen (§§) har ligevægtstilstanden

$$\mathbf{k} = -A^{-1}B = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hvoraf vi så ser, at den fuldstændige løsning er

$$\mathbf{z}(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{11t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

Opgave 3. Vi betragter vektorfunktionen $\mathbf{f} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{f}(x, y, z) = \left(x + y + z^2, 2x + y^2 - z, 3x^2 + y + z\right).$$

(1) Bestem Jacobimatricen $D\mathbf{f}(x, y, z)$ for vektorfunktionen $\mathbf{f}$ i et vilkårligt punkt $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

Løsning. Vi finder, at

$$D\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2z \\ 2 & 2y & -1 \\ 6x & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Bestem Jacobimatricen $D\mathbf{f}(0, 0, 0)$, og vis, at $D\mathbf{f}(0, 0, 0)$ er regulær.

Løsning. Vi ser straks, at

$$D\mathbf{f}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

og at $\det\left(D\mathbf{f}(0, 0, 0)\right) = -1$, hvilket godtgør, at matricen er regulær.

(3) Bestem den inverse matrix $\left(D\mathbf{f}(0, 0, 0)\right)^{-1}$.

Løsning. Vi får, at

$$\left(D\mathbf{f}(0, 0, 0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4) Løs vektorligningen

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\underline{0}) + D\mathbf{f}(\underline{0}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

med hensyn til (x, y, z).

Løsning. Da $\mathbf{f}(\underline{0}) = \underline{0}$, får vi, at

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Big(D\mathbf{f}(0,0,0)\Big)^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -u + v + w \\ 2u - v - w \\ -2u + v + 2w \end{pmatrix}.$$

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^1 \left(5 - 4x^2 + \dot{x} - \dot{x}^2\right) dt = \int_0^1 \left(5 - 4x^2 + \frac{dx}{dt} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) dt$$

og den funktion $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : F(x, y) = 5 - 4x^2 + y - y^2.$$

(1) Vis, at funktionen F er strengt konkav overalt på definitionsmængden $\mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -8x \text{ og } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 1 - 2y,$$

så funktionen F har Hessematricen

$$F''(x, y) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Heraf ses det, at F'' er negativ definit, og dermed er F en strengt konkav funktion.

(2) Bestem den funktion $x^* = x^*(t)$, der maksimerer integralet $I(x)$, idet betingelserne $x^*(0) = 0$ og $x^*(1) = e^2 - e^{-2}$ er opfyldt.

Løsning. Eulers differentialligning for dette variationsproblem, som åbenbart er et maksimumsproblem, er

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} - 4x = 0,$$

hvoraf vi får, at

$$x = x(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t}.$$

Idet betingelserne $x^*(0) = 0$ og $x^*(1) = e^2 - e^{-2}$ skal være opfyldt, finder vi, at

$$x^* = x^*(t) = e^{2t} - e^{-2t}.$$